ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2019

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΩΝ ΕΠΙΤΡΟΠΩΝ, ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει απαραίτητα να γράψουν ***ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, ΣΤΑΘΕΡΟ και ΚΙΝΗΤΟ ΤΗΛΕΦΩΝΟ,*** τα οποία θα **ελεγχθούν σε αντιπαραβολή με την ταυτότητα** που θα έχουν οι εξεταζόμενοι, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει **διανομή φωτοτυπιών** των θεμάτων στους μαθητές.
3. **Να φωτοτυπηθεί και να μοιραστεί σε όλους τους μαθητές η επιστολή που σας αποστέλλουμε μαζί με τα θέματα.**
4. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς τρεις (3) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η διανομή φωτοτυπιών των θεμάτων στους μαθητές (9-12 περίπου). **Δε θα επιτρέπεται** σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει **μια ώρα** από **την έναρξη της εξέτασης**.
5. Οι επιτηρητές των αιθουσών **έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν** τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν **χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα**, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή, αν έχει λόγους να υποπτεύεται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
6. **Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται**.
7. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου και ν' αποσταλούν στην **Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε., Πανεπιστημίου 34, 106 79 Αθήνα, αφού πρώτα στα παραρτήματα, εφόσον είναι εφικτό, γίνει μία πρώτη βαθμολόγηση, σύμφωνα με το σχέδιο βαθμολόγησης της επιτροπής διαγωνισμών.**
8. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στους Προέδρους των Τοπικών Νομαρχιακών Επιτροπών (ΤΝΕ) και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε.
9. **Ο «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ»** θα διενεργηθεί στις **18 Ιανουαρίου 2020** και η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών **«ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»** θα γίνει στις **22 Φεβρουαρίου 2020** στην Αθήνα. Από τους διαγωνισμούς αυτούς και επί πλέον από έναν τελικό προκριματικό διαγωνισμό στην Ε.Μ.Ε. θα επιλεγεί η εθνική ομάδα, που θα συμμετάσχει στην **37η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (Ρουμανία, 3 – 8 Μαΐου 2020),** στην **24η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Ιούνιος 2020)** και στην **61η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Αγ. Πετρούπολη, Ρωσία 8 - 18 Ιουλίου 2020).**
10. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν με την εθελοντική τους συμμετοχή στην επιτυχία των Πανελλήνιων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.
11. **Παρακαλούμε τον Πρόεδρο της ΤΝΕ να αναπαράγει με τα ονόματα των επιτηρητών την ευχαριστήρια επιστολή του Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και να την παραδώσει στους επιτηρητές.**

Για το Διοικητικό Συμβούλιο
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ο Πρόεδρος	Ο Γενικός Γραμματέας
Ανάργυρος Φελλούρης	
Ομότιμος Καθηγητής	Παναγιώτης Δρούτσας
Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου	Καθηγητής Φροντιστηριακής Εκπαίδευσης

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
9 Νοεμβρίου 2019

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

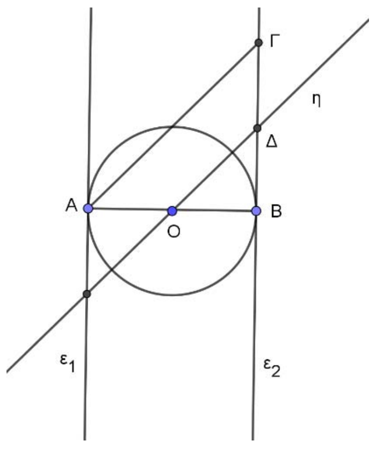
$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-16)^5}{(-8)^5}+\frac{(-12)^5}{6^5}+1\right)\cdot\left(\frac{(-16)^3}{8^3}+\frac{(-12)^3}{(-6)^3}+2019\right).$$

Πρόβλημα 2

Ένας ταξιδιώτης έμεινε σε μία πόλη ένα τριήμερο. Την πρώτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του. Τη δεύτερη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει και την τρίτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει. Αν στο τέλος της τρίτης μέρας του είχαν μείνει 240 ευρώ, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του ο ταξιδιώτης στην αρχή της πρώτης μέρας.

Πρόβλημα 3

Δίνεται κύκλος με διάμετρο AB, κέντρο O και οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που είναι κάθετες στα άκρα A και B της διαμέτρου AB. Στην ευθεία ε_2 παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{B\Gamma}$ ίσο με τη διάμετρο του κύκλου και στη συνέχεια σχεδιάζουμε την ευθεία η να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και να είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A\Gamma}$. Η ευθεία η τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο Δ.



(α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες και να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $\mathrm{AB\Gamma}$ και $\mathrm{OB\Delta}$.
(β) Να αποδείξετε ότι το Δ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $\mathrm{B\Gamma}$.
(γ) Να εξετάσετε το είδος του τετράπλευρου $\mathrm{AO\Delta\Gamma}$.

Πρόβλημα 4
Χρησιμοποιώντας μία μόνο φορά καθέναν από τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 26 γράφουμε 13 κλάσματα. Πόσα το πολύ από αυτά τα κλάσματα μπορεί να είναι ίσα με ακέραιο αριθμό;

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
9 Νοεμβρίου 2019

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\left(\frac{(-32)^9}{4^9}+\frac{(-16)^9}{(-2)^9}\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot\left(\frac{(-10)^{10}}{2^{10}}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-10}+100\right).$$

Πρόβλημα 2
Σε ένα τηλεοπτικό παιγνίδι ο Γιώργος πριν την τελική φάση του παιγνιδιού έχει κερδίσει 600 ευρώ. Στην τελική φάση πρέπει να απαντήσει σε 12 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 80 ευρώ, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 40 ευρώ. Αν ο Γιώργος κέρδισε τελικά 1320 ευρώ, να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά.

Πρόβλημα 3
(α) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{2020}{2019},\frac{2021}{2020},\frac{2022}{2021},\frac{3020}{3019},\frac{3021}{3020},\frac{3022}{3021},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{4020}{4021},\frac{4021}{4022},\frac{4022}{4023},\frac{5020}{5021},\frac{5021}{5022},\frac{5022}{5023},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

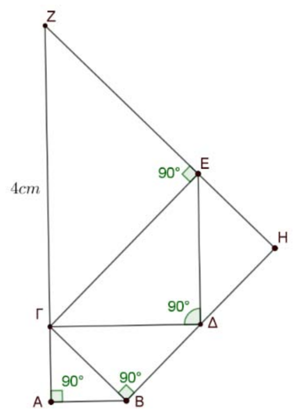
Πρόβλημα 4
Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}, \mathrm{\Delta\hat{B}\Gamma}, \mathrm{E\hat{\Delta}\Gamma}$ και $\mathrm{Z\hat{E}\Gamma}$ είναι ορθές. Δίνεται ακόμη ότι: $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$, $\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{B\Delta}$, $\mathrm{\Delta\Gamma}=\mathrm{\Delta E}$, $\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{EZ}$ και $\mathrm{\Gamma Z}=4\ cm$.

Στο σημείο Η τέμνονται οι ευθείες ΒΔ και ΖΕ.

(α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

(β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΕΗ.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες *Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
9 Νοεμβρίου 2019

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$10\left(\alpha^2+\beta^2\right)=29\alpha\beta \qquad \text{και} \qquad \alpha+\beta=7.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ και $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$.

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{3019}{3020}, \frac{3020}{3021}, \frac{3021}{3022}, \frac{4019}{4020}, \frac{4020}{4021}, \frac{4021}{4022},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 2\cdot \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ έτσι ώστε $\mathrm{AB}=\Delta\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.
(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι ίσα.
(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου αριθμού α για τις οποίες ο ρητός αριθμός $\mathrm{A}=\frac{\left(\alpha^2-1\right)^3}{\left(\alpha-1\right)^4}$ είναι ακέραιος.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
9 Νοεμβρίου 2019

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$\alpha^2+\beta^2=16\alpha\beta \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \alpha^3+\beta^3=90\alpha\beta.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\alpha+\beta$ και $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$.

Πρόβλημα 2
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} xy^3=-8 \\ (x+y)y=2 \end{array}\right\}.$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει η κορυφή Α κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΒΓΔΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΕ και Ζ είναι το μέσο του ΓΔ, να αποδείξετε οι ευθείες ΑΒ και ΖΗ είναι κάθετες και να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\Gamma\hat{Z}H$.

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}-\{3\}$ για τις οποίες οι λύσεις της εξίσωσης

$$(\lambda-3)x^2+(\lambda^2+1)x-(11\lambda-18)=0$$

είναι τα μήκη των δύο καθέτων πλευρών ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα μήκους $\sqrt{17}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
9 Νοεμβρίου 2019

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης:

$$108\left(x-2\right)^4+\left(4-x^2\right)^3=0\ .$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Παίρνουμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΒ και σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε οι ευθείες ΔΕ και ΑΓ να είναι παράλληλες. Στην προέκταση της ΔΕ προς το μέρος του Ε παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΕΖ = ΑΔ. Αν Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΔΒΕ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο, Ζ, Α και Δ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα: $\left\{\begin{array}{c} xy^3=-108 \\ \left(x+y\right)y=-3 \end{array}\right\}$.

Πρόβλημα 4

Με κ διαφορετικά χρώματα θέλουμε να χρωματίσουμε τους αριθμούς 2, 3, 4,…,1024 έτσι ώστε κανένας αριθμός να μην έχει το ίδιο χρώμα με οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του. Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του κ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!